BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ

MỘT CÁCH TIẾP CẬN KHÁC VỀ MỞ RỘNG ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN KHÔNG GIAN MÊTRIC ĐẦY ĐỦ

Mã số: CS2013.01.12

Chủ nhiệm đề tài: TS. Nguyễn Văn Dũng

Đồng Tháp, 6/2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP CƠ SỞ

MỘT CÁCH TIẾP CẬN KHÁC VỀ MỞ RỘNG ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN KHÔNG GIAN MÊTRIC ĐẦY ĐỦ

Mã số: CS2013.01.12

Xác nhận của Chủ tịch HĐ nghiệm thu **Chủ nhiệm đề tài**

Nguyễn Văn Dũng

Đồng Tháp, 6/2014

MỤC LỤC

BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO	**CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP	**Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

TÓM TẮT KẾT QUẢ ĐỀ TÀI KH & CN CẤP CƠ SỞ

Tên đề tài: Một cách tiếp cận khác về mở rộng định lí điểm bất động trên không gian mêtric đầy đủ

Mã số: CS2013.01.12

Chủ nhiệm đề tài: Nguyễn Văn Dũng

Tel.: 0907335008 E-mail: nvdung@dthu.edu.vn

Cơ quan chủ trì đề tài: Trường Đại học Đồng Tháp

Cơ quan và cá nhân phối hợp thực hiện: Không

Thời gian thực hiện: 6/2013 đến 5/2014

1. Mục tiêu: Xây dựng cấu trúc mêtric mới m trên tập con Y của không gian mêtric (X, d) và áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric (Y, m) vào chứng minh những mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric (X, d).

2. Nội dung chính:

- Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

- Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian con và áp dụng

3. Kết quả chính đạt được (khoa học, ứng dụng, đào tạo, kinh tế - xã hội,...):

- Cấu trúc mêtric mới m trên tập con $\overline{O(x, +\infty)}$ của không gian mêtric (X, d) và kĩ thuật mới trong việc áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach trên $\overline{O(x, +\infty)}$ để chứng minh định lí điểm bất động trên không gian mêtric (X, d).

- 1 bài báo khoa học được nhận đăng trên tạp chí Carpathian Journal of Mathematics có tên trong danh mục ISI và tài liệu tham khảo cho giảng viên và sinh viên Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp trong giảng dạy, nghiên cứu và học tập giải tích hiện đại.

Chủ nhiệm đề tài

Nguyễn Văn Dũng

MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING
DONG THAP UNIVERSITY

SOCIALIST REPUBLIC OF VIET NAM
Independence - Freedom - Happiness

SUMMARY

Project Title: Another approach to generalizing fixed point theorems on complete metric spaces

Code number: CS2013.01.12

Coordinator: Nguyễn Văn Dũng

Tel.: 0907335008 E-mail: nvdung@dthu.edu.vn

Implementing Institution: Dong Thap University

Cooperating Institution(s): No

Duration: from 2013, June to 2014, May

1. Objectives: To construct a new metric m on a subset Y of a metric space (X, d) and to apply Banach contraction principle on the metric space (Y, m) to prove some generalizations of Banach contraction principle on the metric space (X, d).

2. Main contents:

- Preliminaries

- Banach contraction principle on subspaces and applications

3. Results obtained:

- A new metric m on the subset $\overline{O(x, +\infty)}$ of the metric space (X, d) and a new technique on using Banach contraction principle on $\overline{O(x, +\infty)}$ to prove fixed point theorems on the metric space (X, d).

- An article accepted to publish on Carpathian Journal of Mathematics which is indexed by ISI, and a reference for lecturers and students of Faculty of Mathematics and Information Technology Teacher Education, Dong Thap University in studying, lecturing and researching advanced analysis.

Coordinator

Nguyễn Văn Dũng

MỞ ĐẦU

1 Tổng quan tình hình nghiên cứu

Lí thuyết điểm bất động trong không gian mêtric đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả, rất nhiều định lí điểm bất động và ứng dụng đã được thiết lập [2]. Trong bài báo [29], Rhoades đã hệ thống 25 điều kiện co, xây dựng nhiều dạng định lí điểm bất động và thiết lập mối quan hệ giữa chúng. Vấn đề này được Collaco và Silva tiếp tục hoàn thiện trong [11]. Nhiều phản ví dụ cho những mối quan hệ này cũng được xây dựng, xem chi tiết trong [29, Theorem 1] và [11, Section 3].

Gần đây, Lí thuyết điểm bất động trong không gian mêtric tiếp tục thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả. Trong tài liệu [31], Suzuki đã giới thiệu một hướng tổng quát mới cho Nguyên lí ánh xạ co Banach bằng cách sử dụng một hàm không tăng θ. Hướng nghiên cứu này đã được tiếp tục trong [1], [3], [13], [26]. Trong [27], Ran và cộng sự đã mở rộng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho không gian mêtric sắp thứ tự bộ phận và áp dụng vào phương trình ma trận. Kĩ thuật này sau đó cũng được áp dụng rộng rãi cho nhiều loại điều kiện co khác nhau, xem [7], [17], [22], [25].

Ở trong nước, Lí thuyết điểm bất động cũng được một số tác giả quan tâm nghiên cứu. Ở Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học Việt Nam, một số tác giả nghiên cứu điểm bất động và ứng dụng của nó trong giải tích đa trị và tối ưu toán học, xem [12], [18]. Ở Trường Đại học Quốc tế, Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh các tác giả và cộng sự cũng nghiên cứu về điểm bất động và ứng dụng của nó trong giải tích đa trị và tối ưu toán học, xem [15], [21]. Ở Trường Đại học Hồng Đức, các tác giả quan tâm đến định lí điểm bất động trên không gian mêtric sắp thứ tự và áp dụng, xem [23], [24]. Ở Trường Đại học Vinh, các tác giả quan tâm đến một số dạng mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach như điều kiện co Meir-Keeler, Ćirić, xem [9], [20]. Ở Trường

Đại học Đồng Tháp, các thành viên của Seminar Giải tích toán học và áp dụng quan tâm đến một số dạng định lí điểm bất động trên những không gian mêtric suy rộng, chẳng hạn [4], [5], [14], [30].

2 Tính cấp thiết của đề tài

Để chứng minh một định lí là mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach, các tác giả thường chỉ ra rằng Nguyên lí ánh xạ co Banach là một hệ quả trực tiếp của định lí mới. Đồng thời, các tác giả xây dựng một ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ thoả mãn các giả thiết của kết quả mới nhưng không thoả mãn Nguyên lí ánh xạ co Banach. Về chi tiết những ví dụ kiểu này, chúng ta có thể tham khảo trong [29, Theorem 1] và [11, Section 3].

Vấn đề đặt ra ở đây là chúng ta có thể áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho ánh xạ $T_Y : Y \longrightarrow Y$ với (Y, m) là một không gian mêtric đầy đủ nào đó để từ đó thu được điểm bất động của $T : X \longrightarrow X$ trên không gian mêtric đầy đủ (X, d). Do đó, việc thiết lập Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric (Y, m) để chứng minh định lí điểm bất động tổng quát trên không gian mêtric (X, d) có ý nghĩa quan trọng đối với Lí thuyết điểm bất động trong không gian mêtric.

Trên cơ sở những nghiên cứu về Lí thuyết điểm bất động của một nhóm giảng viên và sinh viên ở Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp trong thời gian qua, chúng tôi lựa chọn vấn đề nghiên cứu "Một cách tiếp cận khác về mở rộng định lí điểm bất động trên không gian mêtric". Việc nghiên cứu vấn đề này sẽ kế thừa được những kết quả, kĩ thuật và phương pháp của nhóm; tiếp cận được một hướng nghiên cứu mang tính thời sự của giải tích hiện đại trong những năm gần đây và đặt nền móng cho việc ứng dụng những kết quả và tư tưởng kinh điển của giải tích vào những lĩnh vực mang tính ứng dụng cao như phương trình vi phân, khoa học máy tính, tối ưu toán học.

3 Mục tiêu nghiên cứu

Xây dựng cấu trúc mêtric mới m trên tập con Y của không gian mêtric (X, d) và áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric (Y, m) vào chứng minh những mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric (X, d).

4 Cách tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

Cách tiếp cận: sử dụng dãy lặp của một ánh xạ để xây dựng cấu trúc mêtric mới trên tập con của một không gian mêtric đã cho và sử dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric mới để chứng minh những mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric đã cho.

Phương pháp: nghiên cứu các tài liệu tham khảo để xây dựng cấu trúc mêtric mới từ mêtric đã cho. Các kết quả này được thảo luận và trao đổi chi tiết với các tác giả cùng hướng nghiên cứu.

5 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian mêtric, một chủ đề thuộc lĩnh vực Lí thuyết điểm bất động trong không gian mêtric suy rộng.

6 Nội dung nghiên cứu

Nội dung nghiên cứu của đề tài bao gồm:

- Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

- Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian con và áp dụng.

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KẾT QUẢ BỔ TRỢ

1.1 Nguyên lí ánh xạ co Banach

Trong mục này, chúng tôi trình bày lại một số nội dung về Nguyên lí ánh xạ co Banach.

1.1.1 Định nghĩa ([6])**.** Giả sử (X, d) là một không gian mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. T được gọi là một *ánh xạ co* nếu tồn tại $\alpha \in [0, 1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \tag{1.1}$$

1.1.2 Định lí ([6], Nguyên lí ánh xạ co Banach)**.** *Giả sử (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ co. Khi đó T có điểm bất động duy nhất trong X, nghĩa là tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $Tx = x$.*

1.2 Một số điều kiện co trong không gian mêtric

Trong mục này, chúng tôi hệ thống một số điều kiện co là mở rộng của điều kiện co trong Nguyên lí ánh xạ co Banach.

1.2.1 Định lí ([29], Theorem 5)**.** *Giả sử (X, d) là một không gian mêtric đầy* *đủ, $\alpha \in [0,1)$ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ thoả mãn với mọi $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \max \Big\{ d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2} \Big\}. \quad (1.2)$$

Khi đó T có điểm bất động duy nhất y^* và $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = y^*$ với mọi $x \in X$.

Một số điều kiện co khác được liệt kê trong [29] là trường hợp riêng hoặc tương đương với điều kiện co (1.2). Cụ thể

Điều kiện co Kannan [19]: Tồn tại $a \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \leq a\big[d(x,fx) + d(y,fy)\big]. \quad (1.3)$$

Điều kiện co Bianchini [8]: Tồn tại $h \in (0,1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \leq h \max \big\{ d(x,fx), d(y,fy) \big\}. \quad (1.4)$$

Điều kiện co Reich [28]: Tồn tại $a, b, c \geq 0$ thoả mãn $a + b + c < 1$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \leq ad(x,fx) + bd(y,fy) + cd(x,y). \quad (1.5)$$

Điều kiện co Hardy và Rogers [16]: Tồn tại các số không âm a_i thoả mãn $\sum\limits_{i=1}^{5} < 1$ sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$d(fx, fy) \leq a_1 d(x,y) + a_2 d(x,fx) + a_3 d(y,fy) + a_4 d(x,fy) + a_5 d(y,fx). \quad (1.6)$$

Điều kiện co Zamfirescu [33]: Tồn tại α, β, γ với $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ sao cho với mọi $x, y \in X$, ít nhất một trong các điều kiện sau là đúng.

$$\begin{aligned} d(fx,fy) &\leq \alpha d(x,y) \\ d(fx,fy) &\leq \beta\big[d(x,fx) + d(y,fy)\big] \\ d(fx,fy) &\leq \gamma\big[d(x,fy) + d(y,fx)\big]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Điều kiện co Ćirić [10]: Tồn tại các hàm $q, r, s, t : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ và λ thoả mãn

$$\sup_{x,y\in X}\big\{q(x,y)+r(x,y)+s(x,y)+2t(x,y)\big\}\leq\lambda<1$$

sao cho với mọi $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} d(fx,fy) \;\leq\; & q(x,y)d(x,y)+r(x,y)d(x,fx)+s(x,y)d(y,fy)\\ & +t(x,y)\big[d(x,fy)+d(y,fx)\big]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.2.2 Nhận xét. Theo chứng minh của [29, Theorem 1.(xxvi)] thì điều kiện (1.2) tương đương với điều kiện (1.8). Theo chứng minh của [29, Theorem 1.(xiv)] thì (1.1) $\Rightarrow$ (1.6) nhưng chiều ngược lại không xảy ra khi các điều kiện co được áp dụng cho cùng một ánh xạ trên cùng một không gian mêtric (X, d). Từ [11, Theorem 2.1.(vi)], chúng ta có (1.6) $\Rightarrow$ (1.8). Do đó, (1.1) $\Rightarrow$ (1.8), điều này có nghĩa là (1.1) $\Rightarrow$ (1.2) nhưng chiều ngược lại không xảy ra khi các điều kiện co được áp dụng cho cùng một ánh xạ trên cùng một không gian mêtric (X, d). Nói cách khác, Định lí 1.2.1 là một mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trên cùng một không gian mêtric.

CHƯƠNG 2

NGUYÊN LÍ ÁNH XẠ CO BANACH TRÊN KHÔNG GIAN CON VÀ ÁP DỤNG

2.1 Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric con

Mục này trình bày một số điều kiện đảm bảo cho một ánh xạ là ánh xạ co trên không gian con với mêtric nào đó. Những kết quả này đã được công bố trong [32].

2.1.1 Định nghĩa. Giả sử (X, d) là một không gian mêtric và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. Với mỗi $x \in X$, đặt

$$O(x, +\infty) = \{x, Tx, \ldots, T^n x, \ldots\}.$$

Bao đóng của $O(x, +\infty)$ trong (X, d) được kí hiệu là $\overline{O(x, +\infty)}$. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử hoặc $T^n x \neq T^k x$ với mọi $n \neq k$ hoặc tồn tại p sao cho $T^n x \neq T^k x$ với mọi $n \neq k \leq p$ và $T^n x = T^p x$ với mọi $n \geq p$.

Xét $m : \overline{O(x,+\infty)} \times \overline{O(x,+\infty)} \longrightarrow [0,+\infty)$ được xác định như sau:

$$m(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } u = v \in \overline{O(x,+\infty)} \\ \sum\limits_{i=k}^{n-1} d(T^i x, T^{i+1}x) & \text{nếu } u = T^k x \neq v = T^n x, 0 \leq k < n \\ \lim\limits_{i\to\infty} m(T^n x, T^i x) & \text{nếu } u = T^n x, v = \lim\limits_{i\to\infty} T^i x \notin O(x,+\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

Ví dụ sau chứng tỏ m có thể nhận giá trị $+\infty$.

2.1.2 Ví dụ. Xét

$$X = \Big\{ -\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \Big\} \cup \Big\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \Big\} \cup \{0\}$$

với mêtric thông thường và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được xác định bởi

$$T(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2n} & \text{nếu } x = \dfrac{1}{2n-1} \\ \dfrac{1}{2n+1} & \text{nếu } x = -\dfrac{1}{2n} \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó $m(1,0) = +\infty$.

2.1.3 Mệnh đề. *Giả sử (X,d) là một không gian mêtric đầy đủ, $\lambda \in [0,1)$ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ sao cho với mọi $u \in X$,*

$$d(Tu, T^2u) \leq \lambda d(u, Tu). \tag{2.2}$$

Khi đó, với mỗi $x \in X$ và m như trong Định nghĩa 2.1.1, không gian mêtric $(\overline{O(x,+\infty)}, m)$ là một không gian mêtric đầy đủ.

Chứng minh. Với mỗi $x \in X$, khi đó m là một mêtric suy rộng trên $O(x,+\infty)$, nghĩa là m có thể nhận giá trị $+\infty$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, từ (2.2) ta có

$$d(T^n x, T^{n+1}x) = d(T(T^{n-1}x), T^2(T^{n-1}x)) \leq \lambda d(T^{n-1}x, T^n x) \leq \ldots \leq \lambda^n d(x, Tx).$$

Với mỗi $k, n \in \mathbb{N}$, ta có

$$d(T^k x, T^n x) \leq \sum_{i=k}^{n-1} d(T^i x, T^{i+1} x) \leq d(x, Tx) \sum_{i=k}^{n-1} \lambda^i \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, Tx).$$

Vậy $\{T^n x\}$ là một dãy Cauchy. Vì (X, d) là đầy đủ nên tồn tại $y^* \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = y^*$. Do đó $\overline{O(x, +\infty)} = O(x, +\infty) \cup \{y^*\}$. Từ (2.1), với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$m(T^n x, y^*) = \lim_{i\to\infty} m(T^n x, T^i x) = \sum_{i=n}^{\infty} d(T^i x, T^{i+1} x).$$

Vậy m là một mêtric trên $\overline{O(x, +\infty)}$.

Với mỗi dãy Cauchy $\{y_n\}$ theo m trong $\overline{O(x, +\infty)}$, nghĩa là

$$\lim_{n,k\to\infty} m(y_k, y_n) = 0.$$

Chúng ta chỉ cần xét trường hợp $y_n = T^n x$. Theo (2.1), ta có

$$m(y_n, y^*) = m(T^n x, \lim_{i\to\infty} T^i x) = \sum_{i=n}^{\infty} d(T^i x, T^{i+1} x).$$

Từ (2.2), ta nhận được sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{i=0}^{\infty} d(T^i x, T^{i+1} x)$. Vậy ta có $\lim\limits_{n\to\infty} m(y_n, y^*) = 0$, từ đó suy ra $\{y_n\}$ hội tụ về $y^* \in \overline{O(x, \infty)}$ theo m. $\square$

2.1.4 Định lí. *Giả sử (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ, $x \in X$, m như trong Định nghĩa 2.1.1 và $T : X \longrightarrow X$ thoả mãn (2.2). Nếu*

$$T(\overline{O(x, +\infty)}) \subset \overline{O(x, +\infty)}$$

thì $T|_{\overline{O(x,+\infty)}}$ là một ánh xạ co theo m. Khi đó, T có duy nhất điểm bất động y^* trong $\overline{O(x, +\infty)}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = y^*$ trong (X, d).

Chứng minh. Với mỗi $y, z \in \overline{O(x, \infty)}$, $y \neq z$, chúng ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $y = T^k x, z = T^n x, k < n$. Khi đó

$$\begin{aligned} m(Ty, Tz) = m(T^{k+1}x, T^{n+1}x) &= \sum_{i=k+1}^{n} d(T^i x, T^{i+1}x) \\ &\leq \lambda \sum_{i=k+1}^{n} d(T^{i-1}x, T^i x) = \lambda m(y, z). \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $y = T^n x, z = y^* = \lim\limits_{i\to\infty} T^i x$.

Nếu tồn tại k sao cho $Tz = T^k x$ thì $m(Ty, Tz) = m(T^{n+1}x, T^{k+1}x)$. Tương tự như Trường hợp 1 và lưu ý rằng $m(y, z) \geq m(T^n x, T^k x)$ với mọi $n, k \in \mathbb{N}$, ta có $m(Ty, Tz) \leq \lambda m(y, z)$.

Nếu $Tz = y^*$ thì theo (2.1) và chứng minh của Mệnh đề 2.1.3, ta có

$$\begin{aligned} m(Ty, Tz) &= m(T^{n+1}x, y^*) = m(T^{n+1}x, \lim_{i\to\infty} T^i x) = \lim_{i\to\infty} m(T^{n+1}x, T^i x) \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} d(T^i x, T^{i+1}x) \leq \lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} d(T^{i-1}x, T^i x) = \lambda m(y, z). \end{aligned}$$

Vậy $T|_{\overline{O(x,\infty)}}$ là một ánh xạ co trên $(\overline{O(x,\infty)}, m)$.

Hơn nữa, áp dụng Mệnh đề 2.1.3 và Nguyên lí ánh xạ co Banach, ta suy ra với mỗi $x \in X$, T có duy nhất điểm bất động $x^* \in \overline{O(x,\infty)}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$ trong $\big(\overline{O(x,\infty)}, m\big)$. Vậy $x^* = y^*$ và $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = y^*$ trong (X, d). $\square$

2.2 Áp dụng

Trong mục này, chúng tôi chứng tỏ rằng một số định lí điểm bất động là mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trên cùng một không gian mêtric có thể được suy ra bằng cách sử dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach với cấu trúc mêtric được trình bày trong Mục 2.1. Cụ thể, chúng tôi chứng tỏ rằng sự tồn tại của điểm bất động của ánh xạ T thoả mãn (1.2) có thể được suy ra từ Định lí 2.1.4. Những kết quả này đã được công bố trong [32].

2.2.1 Hệ quả. *Giả sử (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ thoả mãn (1.2). Khi đó, với mỗi $x \in X$, T là một ánh xạ co trên $\overline{O(x, +\infty)}$.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $T\big(\overline{O(x,\infty)}\big) \subset \overline{O(x,\infty)}$. Giả sử $y \in \overline{O(x,\infty)}$.

Nếu $y = T^n x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $Ty = T^{n+1}x \in \overline{O(x,\infty)}$.

Nếu $y = y^*$ thì từ (1.2) ta có

$$\begin{aligned} & d(T^{n+1}x, Ty) \qquad (2.3)\\ = \;& d(T^{n+1}x, Ty^*)\\ \le \;& \alpha.\max\Big\{d(T^n x, y^*), d(T^n x, TT^n x), d(y^*, Ty^*), \frac{d(T^n x, Ty^*) + d(y^*, TT^n x)}{2}\Big\}\end{aligned}$$

Lấy giới hạn $n \to \infty$ trong (2.3), ta có $d(y^*, Ty^*) \le \alpha.d(y^*, Ty^*)$. Điều này chứng tỏ $Ty = Ty^* = y^* \in \overline{O(x,\infty)}$.

Tiếp theo, ta chứng minh (1.2) kéo theo (2.2). Thật vây, với mỗi $u \in X$ ta có

$$\begin{aligned} d(Tu, T^2u) &\le \alpha \max\Big\{d(u,Tu), d(u,Tu), d(Tu,T^2u), \frac{d(u,T^2u) + d(Tu,Tu)}{2}\Big\}\\ &= \alpha \max\Big\{d(u,Tu), d(Tu,T^2u), \frac{d(u,T^2u)}{2}\Big\}\\ &\le \alpha \max\Big\{d(u,Tu), d(Tu,T^2u), \frac{d(u,Tu) + d(Tu,T^2u)}{2}\Big\}\\ &= \alpha \max\Big\{d(u,Tu), d(Tu,T^2u)\Big\} = \alpha d(u,Tu), \text{ since } \alpha < 1.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng (2.2) được thoả mãn. Từ Định lí 2.1.4 ta có kết luận cần chứng minh. □

2.2.2 Nhận xét ([32], Remark 3.2)**.** Theo [11, Theorem 2.1.(vi)] thì Định lí 1.2.1 bao hàm kết quả của Kannan trong [19], của Reich trong [28], của

Hardy và Rogers trong [16], của Zamfirescu trong [33], của Ćirić trong [10]. Do đó, từ Hệ quả 2.2.1, sự tồn tại của điểm bất động trong những kết quả nêu trên có thể được suy ra từ Nguyên lí ánh xạ co Banach. Tính duy nhất của điểm bất động được chứng minh dễ dàng từ (1.2).

Tiếp theo là ví dụ minh hoạ cho kết quả đạt được trong cả hai trường hợp lực lượng của $O(x, +\infty)$ vô hạn và lực lượng của $O(x, +\infty)$ hữu hạn.

2.2.3 Ví dụ. Xét $X = [0, 1]$ với mêtric thông thường d và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được xác định bởi

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \in [0, 1) \\ \dfrac{1}{4} & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Trên không gian mêtric (X, d), ánh xạ T thoả mãn điều kiện co (1.2) với $\alpha \in \big[\frac{1}{3}, 1\big)$. Đồng thời T thoả mãn các điều kiện co (1.3), (1.6). Do đó, Định lí 2.1.4, Định lí điểm bất động Kannan trong [19] và Định lí điểm bất động Hardy-Rogers trong [16] áp dụng được cho T và (X, d). Với $x \in \big(\frac{5}{6}, 1\big)$, ta có $d(Tx, T1) > d(x, 1)$. Do đó chúng ta không thể áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho T trên (X, d).

Tuy nhiên, chúng ta thấy có thể áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho T trên $\big(\overline{O(x, +\infty)}, m\big)$.

2.2.4 Ví dụ. Xét $X = [0, 1]$ với mêtric thông thường d và ánh xạ $T : X \longrightarrow X$ được xác định bởi

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x \in [0, 1) \\ \dfrac{1}{4} & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Trên không gian mêtric (X, d), ánh xạ T thoả mãn điều kiện co (1.2) với $\alpha \in \big[\frac{1}{3}, 1\big)$. Đồng thời T thoả mãn các điều kiện co (1.3), (1.6). Do đó, Định lí 2.1.4, Định lí điểm bất động Kannan trong [19] và Định lí điểm bất động Hardy-Rogers trong [16] áp dụng được cho T và (X, d). Với $x \in \big(\frac{3}{4}, 1\big)$, ta có $d(Tx, T1) > d(x, 1)$. Do đó chúng ta không thể áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho T trên (X, d).

Tuy nhiên, chúng ta thấy có thể áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach cho T trên $\big(\overline{O(x, +\infty)}, m\big)$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1 Kết luận

Đề tài đã đạt được các kết quả sau.

- Xây dựng được cấu trúc mêtric mới m trên không gian con $\overline{O(x,+\infty)}$ của không gian mêtric (X,d): Định nghĩa 2.1.1, Mệnh đề 2.1.3.

- Áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric con $(\overline{O(x,+\infty)},m)$ để chứng minh một số mở rộng của Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric (X,d): Định lí 2.1.4, Hệ quả 2.2.1.

Kết quả chính của đề tài đã được nhận đăng trên Carpathian Journal of Mathematics, một tạp chí khoa học được liệt kê trong danh mục ISI [32]; nội dung của đề tài cũng được báo cáo trước Seminar Giải tích toán học và áp dụng và sinh hoạt chuyên môn của Bộ môn Giải tích-Toán ứng dụng.

2 Kiến nghị

Đề tài có thể được phát triển theo những hướng sau:

- Xây dựng những cấu trúc mêtric phù hợp khác trên không gian con $\overline{O(x,+\infty)}$ để chứng minh những mở rộng khác của Nguyên lí ánh xạ co Banach trên (X,d).

- Nghiên cứu bài toán tương tự cho Nguyên lí ánh xạ co Banach trên không gian mêtric suy rộng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] M. Abbasa, B. Ali, and C. Vetro, *A Suzuki type fixed point theorem for a generalized multivalued mapping on partial Hausdorff metric spaces*, Topology Appl. **160** (2013), 553 – 563.

[2] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, 2004.

[3] S. M. A. Aleomraninejada, S. Rezapour, and N. Shahzad, *On fixed point generalizations of Suzuki's method*, Appl. Math. Lett. **24** (2011), 1037 – 1040.

[4] T. V. An, N. V. Dung, and V. T. L. Hang, *A new approach to fixed point theorems on G-metric spaces*, Topology Appl. **160** (2013), 1486 – 1493.

[5] T. V. An, N. V. Dung, and N. T. Hieu, *Further results on 2-metric spaces*, J. Sci. Vinh Univ. **41** (2012), no. 3, 1 – 10.

[6] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133 – 181.

[7] T. G. Bhaskar and V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal. **65** (2006), no. 7, 1379 – 1393.

[8] R. M. T. Bianchini, *Su un problema di S. Reich aguardante la teoria dei punti fissi*, Boll. Un. Mat. Ital. **5** (1972), 103 – 108.

[9] K. P. Chi, E. Karapinar, and T. D. Thanh, *A generalization of the Meir-Keeler type contraction*, Arab J. Math. Sci. **18** (2012), 141 – 148.

[10] L. B. Ćirić, *Generalized contractions and fixed-point theorems*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) **12** (1971), no. 26, 19 – 26.

[11] P. Collaço and J. C. E. Silva, *A complete comparison of 25 contraction conditions*, Nonlinear Anal. **30** (1997), no. 1, 471 – 476.

[12] N. H. Dien, *Some remarks on common fixed point theorems*, J. Math. Anal. Appl. **187** (1994), 76 – 90.

[13] D. Dorić and R. Lazovic, *Some Suzuki-type fixed point theorems for generalized multivalued mappings and applications*, Fixed Point Theory Appl. **2012:40** (2012), 1 – 8.

[14] N. V. Dung, N. T. Hieu, N. T. T. Ly, and V. D. Thinh, *Remarks on the fixed point problem of 2-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2013:167** (2013), 1 – 7.

[15] N. X. Hai and P. Q. Khanh, *Existence of solutions to general quasiequilibrium problems and applications*, J. Math. Anal. Appl. **133** (2007), no. 3, 317 – 327.

[16] G. E. Hardy and T. D. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. **16** (1973), no. 2, 201 – 206.

[17] J. Harjani and K. Sadarangani, *Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3403 – 3410.

[18] R. Horst and H. Tuy, *Global optimization: Deterministic approaches*, Springer, 1996.

[19] R. Kannan, *Some results on fixed points II*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), no. 4, 405 – 408.

[20] E. Karapinar, K. P. Chi, and T. D. Thanh, *A generalization of Ćirić quasicontractions*, Abstr. Appl. Anal. **2012** (2012), 1 – 9.

[21] P. Q. Khanh and D. T. Luc, *Stability of solutions in parametric variational relation problems*, Set-Valued Anal. **16** (2008), no. 7-8, 1015 – 1035.

[22] V. Lakshmikantham and L. Ćirić, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 12, 4341 – 4349.

[23] N. V. Luong and N. X. Thuan, *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 3, 983 – 992.

[24] N. V. Luong and N. X. Thuan, *Fixed point theorem for generalized weak contractions satisfying rational expressions in ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2011:46** (2011), 1 – 10.

[25] D. O'Regan and A. Petruşel, *Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 1241 – 1252.

[26] D. Paesano and P. Vetro, *Suzuki's type characterizations of completeness for partial metric spaces and fixed points for partially ordered metric spaces*, Topology Appl. **159** (2012), 911 – 920.

[27] A. C. M. Ran and M. C. B. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 5, 1435 – 1444.

[28] S. Reich, *Some remarks concerning contradiction mappings*, Canad. Math. Bull. **14** (1971), no. 1, 121 – 124.

[29] B. E. Rhoades, *A comparison of various definition of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **226** (1977), 257 – 290.

[30] S. Sedghi and N. V. Dung, *Fixed point theorems on S-metric spaces*, Mat. Vesnik **66** (2014), no. 1, 113 – 124.

[31] T. Suzuki, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 1861 – 1869.

[32] D. Wardowski and N. V. Dung, *A note on fixed point theorems in metric spaces*, Carpathian J. Math. (2014), accepted paper.

[33] T. Zamfirescu, *Fix point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 292 – 298.

PHỤ LỤC

Nội dung bài báo khoa học về các kết quả của đề tài.

1. D. Wardowski and N. V. Dung, *A note on fixed point theorems in metric spaces*, Carpathian J. Math. (2014), accepted paper.